WIE MAN QUADRATISCHE GLEICHUNGEN LÖST

(Das Verfahren mit der quadratischen Ergänzung)

Eine Gleichung der Form

$ax^2 + bx + c = d$

nennt man eine *quadratische Gleichung*[1], wobei a, b, c und d für beliebige reelle Zahlen stehen: a ist der *quadratische Koeffizient*, b der *Linearkoeffizient* und c und d sind *konstante Glieder.*

Um eine solche Gleichung zu *lösen*, d.h. um sie letztendlich in die Form »x gleich Zahl« zu überführen, ist eine Reihe von *äquivalenten Umformungen* durchzuführen, die zwischen den Zeilen mit dem Zeichen '<=>' gekennzeichnet werden.

Das Neue gegenüber den linearen Gleichungen vom Typ $ax + b = c$ ist offensichtlich das *quadratische Glied*, d.h. der Summand mit dem Faktor x^2. Um einen solchen Summanden aus der zweiten Potenz in die erste, die für die Lösung verlangt ist, zu überführen, gibt es nun zwei Möglichkeiten, von denen eine im vorliegenden Fall nicht zum Ergebnis führt: Es hat nämlich keinen Zweck, die gesamte Gleichung durch x zu teilen, da dann zwar x^2 in x überführt wird, dafür aber die Brüche c/x und d/x als problematische Ausdrücke auftauchen[2]. Um diese Brüche zu kürzen, müsste man wieder mit x multiplizieren und hätte damit lediglich einmal im Kreis gerechnet.

Es führt also kein Weg an der hier erforderlichen *Wurzeloperation* vorbei. Bevor man sich an die Durchführung dieser Operation macht, werden noch einige Vereinfachungsschritte mit der Gleichung vorgenommen:

1.

Da c und d beides Zahlen sind, können sie zusammengefasst werden: Man *annulliert d*:

$ax^2 + bx + c = d \mid - d$

<=>

$ax^2 + bx + (c - d) = 0$

2.

Da der Summand ax^2 die Hauptschwierigkeit birgt, ist es sinnvoll, ihn zu vereinfachen, indem man durch a teilt:

$ax^2 + bx + (c - d) = 0 \mid : a$

<=>

$x^2 + (b/a)\, x + (c - d)/a = 0$

[1] *Kursiv* gesetzte Wörter sind Hervorhebungen oder *Fachausdrücke,* die entsprechend ihrer *Definition* beherrscht werden müssen.

[2] Abweichend von der handschriftlichen Norm gilt hier das Zeichen '/' als Bruchstrich.

3.

Da a, b, c und d reelle Zahlen sind, können sie addiert, subtrahiert, geteilt oder multipliziert werden und das Ergebnis ist immer ebenfalls eine reelle Zahl. Auf diese Weise fasst man b/a zu p und $(c - d)/a$ zu q zusammen:

$x^2 + b/a\, x + (c - d)/a = 0$

<=>

$x^2 + p\, x + q = 0$

4.

»Aufräumen«: Es wird so umgeformt, dass alle Ausdrücke mit x auf einer Seite des Gleichheitszeichens stehen und der ‘Rest’, in unserem Falle die Zahl q, auf der anderen. Dafür wird q annulliert:

$x^2 + p\, x + q = 0 \mid - q$

<=>

$x^2 + p\, x = - q$

5.

Kann in diesem Stadium die notwendige Wurzeloperation durchgeführt werden? Dafür müsste man zuerst $x^2 + p\, x$ zu *einem* Ausdruck zusammenfassen, wie folgendes Beispiel zeigt:

Exkurs (1) zum Wurzelziehen:

$\sqrt{9} = 3$, da $3 \bullet 3 = 9$.

$\sqrt{16} = 4$, da $4 \bullet 4 = 16$.

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4$, also 7.

ABER:

$\sqrt{(9 + 16)}$[3] $= \sqrt{25}$, also 5.

Daher:

$\sqrt{(9 + 16)} \neq$[4] $\sqrt{9} + \sqrt{16}$

Aus dem Beispiel erhellt folgende Regel:

»Die Wurzel aus einer Summe ist nicht gleich der Summe der Wurzeln ihrer Summanden.«

[3] Die Schreibweise √(9 + 16) bedeutet, dass das Wurzelzeichen seine Wirksamkeit über den gesamten Klammerausdruck erstreckt.

[4] Das Zeichen ‘≠’ bedeutet »ist nicht gleich groß«.

Um die Wurzel aus einer Summe zu ziehen, müssen also zunächst alle Summanden dieser Summe zu *einer* Zahl zusammengefasst werden. Die Summanden $x^2 + px$ *können* aber nicht zusammengefasst werden, da es sich um Ausdrücke mit unterschiedlichen Exponenten handelt, vergleichbar Strecken (m, bzw x) und Flächen (m^2, bzw x^2). Meter und Quadratmeter können genausowenig zusammengefasst werden, wie Gummistiefel und Gedichte (Äpfel und Birnen). Scheinbar ist man also im gegebenen Stadium der Äquivalenzumformungen in einer *Aporie* gelandet, deren Überwindung – wie immer – einen genialen Dreh erfordert.

Exkurs (2): Der geniale Dreh

Dieser Schlüssel zur Lösung liegt im vertieften (verallgemeinerten, abstrahierten, algebraisierten) Verständnis der Wurzeloperation: Soll die Wurzel aus einem Ausdruck A gezogen werden, so wird ein Ausdruck B gesucht, der mit sich selbst mal genommen den Ausdruck A ergibt. Oder mit anderen Worten: Wenn man den Ausdruck A in n gleiche Faktoren B zerlegt, dann ist B die n-te Wurzel aus A. Ein Zahlenbeispiel:

$8 = 2 \bullet 2 \bullet 2$, daher $2 = \sqrt[3]{8}$

Welche innere Struktur der Faktor B aufweist, ist dabei ohne Belang; es ist also egal, ob wir '2' schreiben oder '(1 + 1)' oder '(8,31 - 6,31)' usw. Der Faktor B kann also seinerseits z.B. eine Summe sein. Dafür ein einschlägiges algebraisches Beispiel (die sog. erste *binomische Formel)*:

$(a + b) \bullet (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$, daher

$(a + b) = \sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)}$

6.

Auf unseren Fall übertragen ist die Frage: »Was mal was ist gleich $x^2 + p\,x$?« durch eine *Analogie* zum letzten Beispiel zu lösen:

$x^2 \cong$[5] a^2

$x \cong a$

$p\,x \cong 2\,ab$

$p \cong 2\,b$

$0{,}5\,p \cong b$

$(x + 0{,}5\,p) \bullet (x + 0{,}5\,p) = x^2 + px + 0{,}25\,p^2$

Wir hätten also einen Ausdruck, nämlich $(x + 0{,}5\,p)$, der die Wurzel aus dem Ausdruck $x^2 + px + 0{,}25\,p^2$ ist.

Exkurs (3): Probe

An dieser Stelle im Lösungsverfahren empfiehlt sich dringend eine Probe: Dazu multiplizieren wir den Ausdruck $(x + 0{,}5\,p)$ mit sich selbst und achten dabei darauf, dass man

[5] Das Zeichen '≅' steht für »entspricht« bzw. »ist analog zu«.

Klammerausdrücke so ausmultipliziert, dass man jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem der zweiten einzeln (Vorzeichen mitsprechen!) malnimmt. Hat z.B. die erste Klammer drei Summanden und die zweite vier, so erhält man nach dem Ausmultiplizieren zwölf Summanden! Die Probe stimmt, wenn nach dem Ausmultiplizieren wieder als Ergebnis die Vorzeile ($x^2 + p\,x + 0{,}25\,p^2$) auftaucht.

Kehren wir nun zu dem Lösungsstadium der Aporie, an dem wir unsere Gleichung vorerst verlassen haben, zurück:

$x^2 + p\,x = -\,q$

7.

Um die gegebene Gleichung in eine zu überführen, aus der man Wurzel ziehen kann, müssen wir also nichts weiter tun, als auf beiden Seiten der Gleichung $0{,}25\,p^2$ zu addieren, d.h. das entscheidende Lösungskommando in diesem Stadium lautet:

»Addiere auf beiden Seiten der Gleichung die Hälfte der Zahl vor x zum Quadrat!«

$x^2 + p\,x = -\,q \mid +\,0{,}25\,p^2$

<=>

$x^2 + p\,x + 0{,}25\,p^2 = -\,q + 0{,}25\,p^2$

8.

Indem wir auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens diesen Summanden: $(0{,}5p)^2$, die sogenannte ***quadratische Ergänzung*** addieren, verwandeln wir die Summe $x^2 + p\,x$ in die Summe $x^2 + p\,x + 0{,}25\,p^2$, die aus der Multiplikation der zwei gleichen Faktoren $(x + 0{,}5\,p) \bullet (x + 0{,}5\,p)$ entstanden ist *und aus der man deshalb die Wurzel ziehen* kann. Diese Operation der Verwandlung der Summe in ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren ist das Herzstück des Lösungsverfahrens.

Wir ziehen also die Wurzel und erhalten links vom Gleichheitszeichen entsprechend den obigen Ausführungen den Faktor $(x + 0{,}5\,p)$ als Wurzel der Summe $x^2 + px + 0{,}25\,p^2$ und rechts vom Gleichheitszeichen die (unproblematische) Wurzel aus der *Zahl* $(-\,q + 0{,}25\,p^2)$:

$x^2 + p\,x + 0{,}25\,p^2 = -\,q + 0{,}25\,p^2 \mid \pm$[6]$\sqrt{}$

<=>

$x_{1/2} + 0{,}5\,p = \pm\sqrt{(-\,q + 0{,}25\,p^2)}$

9.

Durch Annullieren der Zahl $0{,}5\,p$ ergeben sich die Lösungen:

$x_{1/2} + 0{,}5\,p = \pm\sqrt{(-\,q + 0{,}25\,p^2)} \mid -\,0{,}5\,p$

[6] Das Zeichen '±' bedeutet, dass der nachfolgende Ausdruck *sowohl* positiv *als auch* negativ gerechnet werden muss. Hier also: »Ich rechne links und rechts vom Gleichheitszeichen: ‚plus/minus Wurzel aus'«. Warum dies so ist, wird in Exkurs (4) erklärt.

=>[7]

$x_1 = -0{,}5\,p + \sqrt{(-q + 0{,}25\,p^2)}$

und:

$x_2 = -0{,}5\,p - \sqrt{(-q + 0{,}25\,p^2)}$

Exkurs (4): zwei Lösungen, eine oder keine

Ergibt der Ausdruck $-q + 0{,}25\,p^2$, der unter der Wurzel steht, einen positiven Wert, so erhalten wir ***zwei*** Lösungen, denn sowohl

$(+3) \bullet (+3) = +9$ als auch

$(-3) \bullet (-3) = +9$.

Ergibt der Ausdruck $-q + 0{,}25\,p^2$, der unter der Wurzel steht, den Wert null, so erhalten wir ***eine*** Lösung, nämlich $x_{1/2} = -0{,}5\,p$, denn Wurzel aus null ist gleich null.

Ergibt der Ausdruck $-q + 0{,}25\,p^2$, der unter der Wurzel steht, einen negativen Wert, so erhalten wir ***keine*** Lösung, denn egal, ob man eine positive oder negative Zahl als Wurzel unterstellt, so ergibt ihr Quadrat doch immer einen positiven Wert und keinen negativen, wie er in diesem Fall vorliegt.

Da also der Wert unter der Wurzel von entscheidender Bedeutung für die Lösbarkeit und Lösungsmenge der quadratischen Gleichung ist, hat dieser Ausdruck einen eigenen Namen: Man nennt ihn *Diskriminante*, denn er unterscheidet (diskriminiert) die möglichen Fälle.

Exkurs (5): Probe

Da der Ausdruck $-0{,}5\,p \pm \sqrt{(-q + 0{,}25\,p^2)}$ zwei *Zahlen* ergibt, kann man diese problemlos in die Ausgangsgleichung[8] einsetzen und überprüfen, ob sie mit ihnen eine *wahre Aussage* ergibt (ob die Gleichung ‘aufgeht’).[9]

[7] Das Zeichen ‘=>‘ bedeutet »daraus folgt«. Es ist hier notwendig, denn es liegt keine Äquivalenzumformung vor: Von der Zeile $x_1 = (\ldots)$ gelangt man nur zu $+\sqrt{}$, von $x_2 = (\ldots)$ nur zu $-\sqrt{}$.

[8] … und nicht in eine der äquivalenten Umformungen dieser Ausgangsgleichung, die wir selbst erzeugt haben; denn jede Umformung birgt das Risiko des Verrechnens, einzig die gegebene Gleichung gewährt völlige Sicherheit.

[9] Wenn Sie den hier dargelegten Lösungsweg mehrfach (5-20 mal) an Beispielen durchgerechnet haben, werden Sie merken, dass der Aufwand sich enorm reduziert und die Abläufe sich routinisieren. Der Vorteil des Verfahrens besteht darin, dass es von Anfang bis Ende aus nachvollziehbaren Operationen besteht. Das unterscheidet es von der berüchtigten »p-q-Formel«. Diese Formel müssten Sie, wie jede andere auch, auswendig lernen und anwenden, ohne zu wissen was Sie und warum Sie es tun. In der Konsequenz kommt es fast unausweichlich zu unentdeckt bleibenden Vorzeichenfehlern. Für die schulische Mathematik gilt beinhart der Satz:

Je mehr Formeln Sie auswendig lernen, desto dümmer werden Sie.