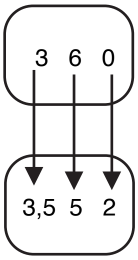
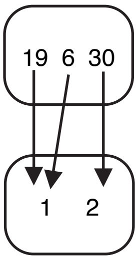
LINEARE FUNKTIONEN

ZUORDNUNGEN

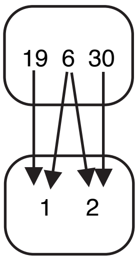
Eine *Relation* ist eine nicht eindeutige Z. (Beispiel: Eine Mutter gehört zu mehreren Kindern). Eine *Funktion* ist eine eindeutige Z. (Beispiel: Zu jedem Kind gehört eine Mutter). Bei einer Funktion wird jedem Element einer bestimmten *Definitionsmenge* ein und nur ein Element einer *Wertemenge* zugeordnet. Kann man die Zuordnungsvorschrift durch algebraische Symbole und Operatoren beschreiben, so ergibt sich eine *Funktionsgleichung*.



Zuordnungen werden auch als *Pfeilbilder* dargestellt.



Welche Abbildung ist eine Funktion?

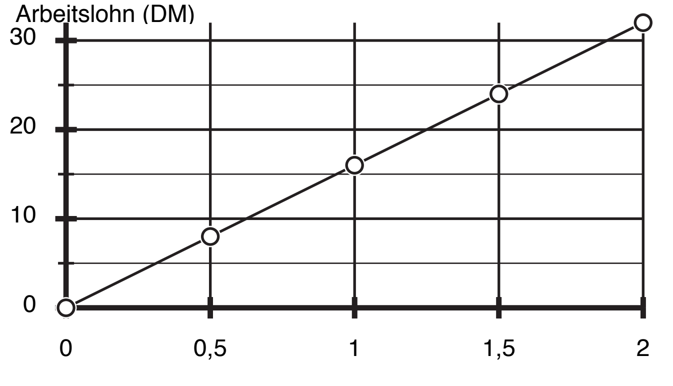


Beispiel:
Maria bekommt für jede Stunde Schreiben am Computer DM 16.-. Bezeichnet man die Arbeitszeit mit x und den Arbeitslohn mit y, so ergibt sich: $\boxed{\text{y (DM) = x (h) • 16 (DM/}}$

Weil y (der Lohn) von x (der Arbeitszeit) abhängt, nennt man y auch eine *Funktion von x* (Definitionsbereich: $\mathbb{N}$) und schreibt: $\boxed{y = f_{(x)} = 16}$

GRAPH

Um eine Funktion zeichnerisch darzustellen, benutzt man ein *Koordinatensystem*. Auf der Linie von links nach rechts (x-Achse) werden die x-Werte (*unabhängige,* 'gegebene' *Variable*) eingetragen, von unten nach oben (y-Achse) die y-Werte (*abhängige Variable*). Die Verbindung der zugeordneten Werte ergibt *Punkte*. Die Verbindung der einzelnen Punkte erzeugt den *Graphen* der Funktion.



1: 28 (Maßstab beachten!)

Graph der Funktion y = f (x) = 16 x

LINEAR

Funktionen unterscheidet man nach der Art der Abhängigkeit der Variablen voneinander: Wenn eine bestimmte x-Werte-*Änderung* (z.B. plus eins) immer diegleiche y-Werte-*Änderung* (z.B. plus 1,5) bewirkt, spricht man von einer linearen Funktion: Die zeichnerische Darstellung einer solchen Funktion ergibt nämlich eine gerade Linie.

Beispiel:

Funktionsgleichung:
$y = f_{(x)} = 1,5\,x - 0,5$

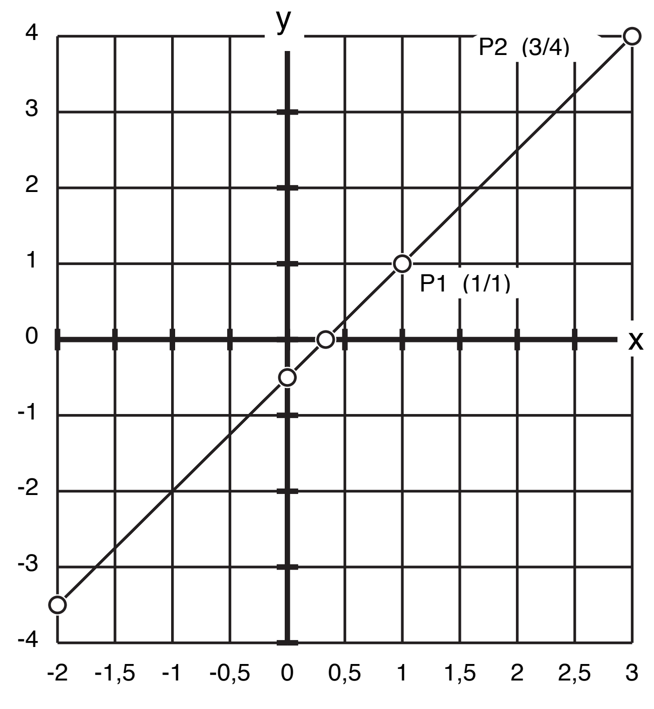
x	y
-2	-3,5
-1	-2
0	-0,5
1	1
2	2,5
3	4

KOMMENTAR

Wenn der x-Wert sich um +1 ändert, dann ändert sich der y-Wert um +1,5

VOM GRAPH ZUR FUNKTIONSGLEICHUNG

Für ebene Flächen gilt: *Eine Gerade ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten*; deshalb wird jede Gerade durch zwei beliebige Punkte *definiert*. Ein Punkt ist festgelegt durch seinen *Ort*. Der Ort wird durch seine *Koordinaten* (x- und y-Wert) beschrieben. Punkte notiert man z.B. folgendermaßen: P_1 (1/1), P_2 (3/4). Die erste Zahl ist jeweils der x-, die zweite der y-Wert des Punktes.



VOM GRAPH ZUR FUNKTIONSGLEICHUNG

Die zeichnerische Festlegung einer Geraden durch zwei Punkte *muß* eine algebraisch-symbolische (»rechnerische«) Entsprechung haben: Es muß also möglich sein, aus den zwei Wertepaaren sowohl den Steigungswinkel der Geraden als auch ihre Schnittpunkte mit den Koordinaten-Achsen zu bestimmen. Mit dem Steigungswinkel allein wäre erst eine unendliche Schar von Parallelen gegeben. Durch die Bestimmung eines beliebigen Punktes der Geraden wird aus dieser Parallelenschar eine einzige ausgewählt.

STEIGUNGSWINKEL

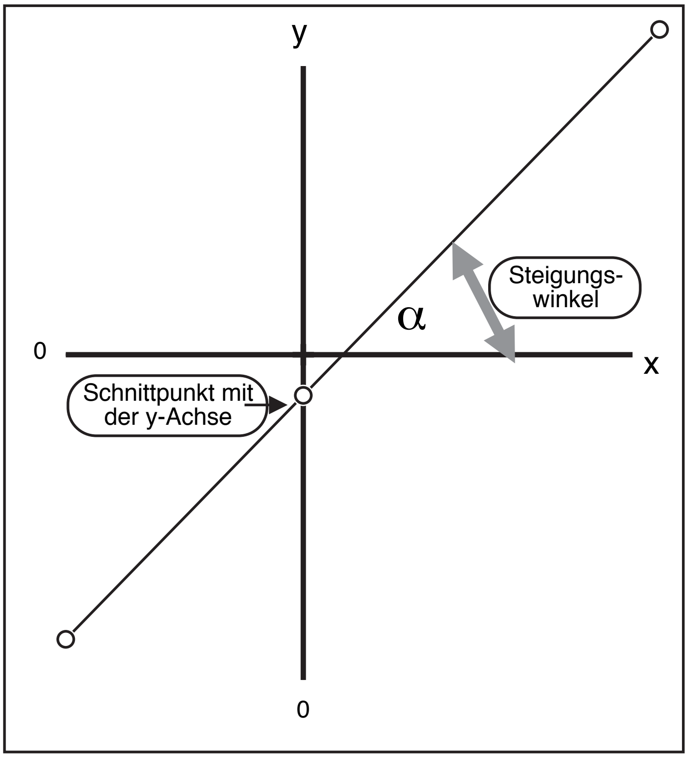
Der Steigungswinkel einer geraden Linie (z.B. einer Straße) kann durch zwei Strecken, die rechtwinklig aufeinander stehen, bestimmt werden: Z.B. »Gehe zehn Schritte geradeaus und dann drei Schritte nach oben«.Das Maß, wie oft die x-Achsen-Entfernung der beiden Punkte in ihre y-Achsen-Entfernung paßt, legt einen Winkel fest. Für dieses Maß teilt man (Quotient) die y-Achsen-Entfernung durch die x-Achsen-Entfernung. Die Entfernungen sind gleich dem Unterschied (Differenz = Delta = Δ) zwischen beiden Werten. So erhält man den *Differenzenquo-*

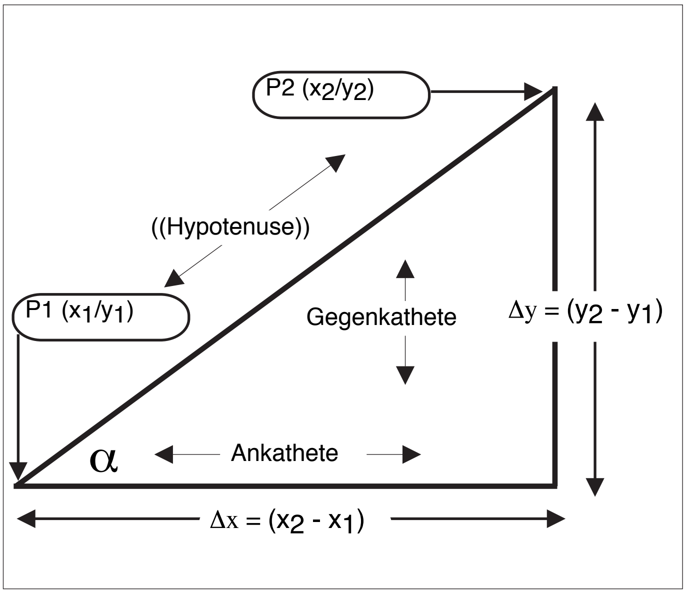
TANGENS

Die Abstände Delta-y (Δy) und Delta-x (Δx) bilden mit der Geraden (Hypotenuse) ein rechtwinkliges Dreieck. Das Streckenverhältnis von Delta y (Gegenkathete) zu Delta x (Ankathete) in diesem Dreieck wird mit dem Differenzenquotienten errechnet und ist der *Tangens*(tan) des Steigungswinkels alpha (α). Als Steigungswinkel ist der Winkel ausgehend von der x-Achse linksdrehend zum Graphen hin festgelegt. Der Tangens*wert* kann mit dem Taschenrechner in den *Winkel* alpha umgerechnet werden.

LINEARKOEFFIZIENT

Man erhält aus beliebigen zwei Punkten einer Geraden immer den gleichen Differenzenquotienten, denn die Gerade hat überall die gleiche Steigung, sonst wäre sie keine Gerade. Der x-Wert wird also immer nach der gleichen Rechenregel bearbeitet, um daraus den zugehörigen y-Wert zu erhalten. Der x-Wert wird immer mit dem Differenzenquotienten (Tangens, Steigung) multipliziert; in dieser Eigenschaft nennt man ihn auch Linearkoeffizient (Beiwert von x).





DIFFERENZENQUOTIENT
=
LINEARKOEFFIZIENT
=
STEIGUNG
=
TANGENS

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$$

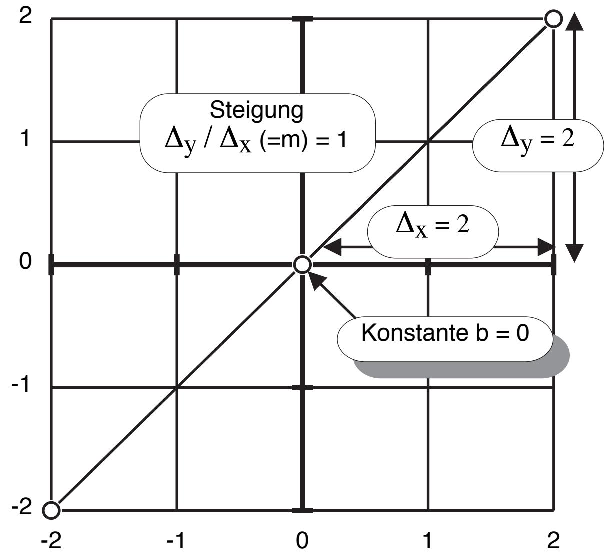
$$= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

VOM GRAPH ZUR FUNKTIONSGLEICHUNG

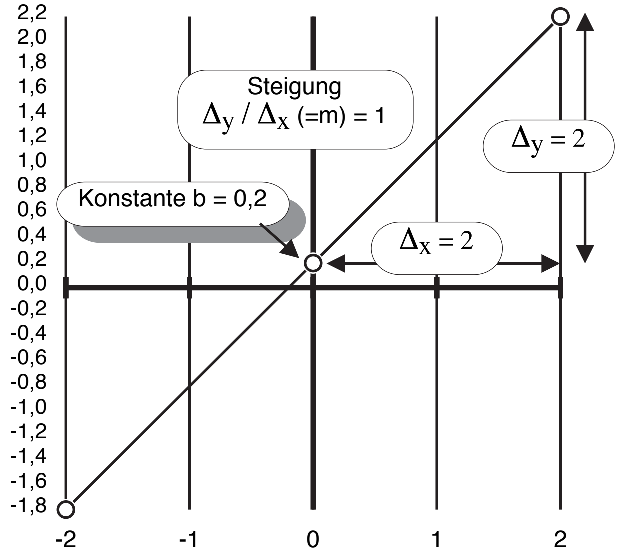
STANDARDFUNKTIONSGLEICHUNG

Durch ihren Steigungswinkel und einen beliebigen Punkt, z.B. ihren Schnittpunkt mit der y-Achse, ist eine Gerade eindeutig festgelegt. Geraden mit gleichem Linearkoeffizienten (Formelsymbol: m) bilden den gleichen Winkel mit der x-Achse, sie haben die gleiche Steigung, d.h. sie sind parallel. Ihre *parallele Verschiebung*, d.h. ihr Schnittpunkt mit der y-Achse wird durch die *Konstante* (Formelsymbol: b) festgelegt. Mit der *Funktionsgleichung* stellt man Steigung und Konstante einer Geraden in algebraischen Symbolen und Zahlen dar. Mit der Funktionsgleichung kann man für jeden beliebigen x-Wert den dazugehörigen y-Wert der Geraden ausrechnen. Jedes solche *Wertepaar* stellt einen *Punkt* der Geraden dar. Die Werte werden in einer kommentierten *Wertetabelle* zusammengestellt.

$$\boxed{y = f_{(x)} = m\,x + b}$$



Graph der Funktion $y = f_{(x)} = x$



Graph der Funktion $y = f_{(x)} = x + 0{,}2$

BESTIMMUNG DER KONSTANTE

Nach der Bestimmung des Linearkoeffizienten werden die Koordinaten eines Punktes P_1 (x_1/y_1) in die Standardfunktionsgleichung eingesetzt und die Gleichung nach b aufgelöst:

$m = (4 - 1) : (3 - 1)$	$y_1 - m \bullet x_1 = b$
$m = 3 : 2 \quad = 1{,}5$	$1 - 1{,}5 \bullet 1 = b$
$y_1 = f_{(x1)} \quad = m \bullet x_1 + b$	$-0{,}5 = b$

ACHSENSCHNITTPUNKTE

Wenn in die Funktionsgleichung für x der Wert null eingesetzt wird, ergibt sich der Wert b, die Konstante, als Schnittpunkt mit der y-Achse.

$$y = f_{(0)}$$
$$y = m \bullet 0 + b$$
$$y = b$$

Setzt man für y den Wert null ein, erhält man den x-Wert, an dem die Gerade die x-Achse schneidet. Dieser Schnittpunkt ist die *Nullstelle* der Funktion.

$$0 = f_{(x_0)}$$
$$0 = m \bullet x_0 + b$$
$$x_0 = -\,b / m$$