RECHENOPERATIONEN UND LOGISCHER AUFBAU DES ZAHLENSYSTEMS

»Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht«
(Leopold Kronecker)
(– und alle anderen der Teufel …)

Wenn man bei den Dingen dieser Welt von allen besonderen, sie unterscheidenden Eigenschaften absieht, d.h. wenn man sie einem so ungeheuerlichen Abstraktionsprozess unterzieht, dass von ihnen nichts übrig bleibt, als die Tatsache ihres Vorhandenseins, dann hat man ihre Gemeinsamkeit auf ihre *Menge*[1], d.h. ihre Zählbarkeit reduziert: Als eine der folgenschwersten und größten Entdeckungen der Menschheit ist die *Zahl* 1 in die Welt gesetzt.

Zugleich mit, als Ausdruck und in Folge dieser Abstraktion (warum?) entsteht das

Axiom $1 = 1$

und mit ihm durch die Anwendung des *Nachfolgerprinzips* das *Zählen* und die *Menge der natürlichen Zahlen* N. Der Terminus erklärt sich dadurch, dass sich in der Natur zwar eins, zwei oder drei Faustkeile oder Mammuts finden lassen, aber weder 3,78 oder minus vier. Gleichzeitig wird klar, dass die Menge dieser Zahlen *unendlich* sein muss, da zu einer gegebenen 'letzten' stets noch durch Hinzufügen der 1 eine weitere erzeugt werden kann.

Innerhalb der Menge der natürlichen Zahlen sind alle ihre *Elemente* ($\in$), d.h. Mitglieder zusammensetzbar, d.h. addierbar, so dass als Ergebnis wieder eine natürliche Zahl auftritt:

$\in N + \in N = \in N$.

Um eine *Addition* vom Typ

$a + b = c$ (*Summand* a plus *Summand* b gleich *Summe* c)

rückgängig zu machen, d.h. um von c wieder zurück nach a zu kommen, also um den Rechenvorgang umzukehren, muss man b von c subtrahieren:

$c - b = a$ (*Minuend* c minus *Subtrahend* b gleich *Differenz* a).

Innerhalb der Menge N ist dies nur für $c \geq$ [größer oder gleich] b durchführbar, d.h. für die Umkehrung der Addition im strengen Sinne, kann aber nicht verallgemeinert werden für beliebige $\in N$.

Wenn man diese *Umkehroperation* ohne Ausnahme für alle $\in N$ gelten lassen will[2] (d.h. auch für den Fall, $a - b = c$ mit $b \geq$ [größer oder gleich] a), muss man nun eine neue Art von Zahlen in die Welt setzen, nämlich die negativen Zahlen und die Null, die weder negativ noch positiv ist.

---

1 *Kursiv* gesetzte Ausdrücke sind *Termini*, d.h. Fachausdrücke für *Fachbegriffe* und müssen beherrscht werden.

2 Erinnern Sie sich an die *Aporie* der 2.-Klasse-Aufgabe: "Auf dem Tisch liegen sieben Äpfel. Klaus soll acht Stück wegnehmen. Wieviele Äpfel liegen nun auf dem Tisch?" – "Das geht nicht!"

Durch Verallgemeinerung der *Umkehroperation* entsteht also ein neuer Zahlenbereich, die *Menge der ganzen Zahlen* Z *(inklusive der Null).*

Die Menge Z, von der die Menge N ein Teil ist (N ⊂ Z, lies: 'N *ist Teilmenge von* Z'), können wir uns als einen *Zahlenstrahl* vorstellen, der fast vollständig aus Lücken besteht und in regelmäßigen Abständen (welchen?) Punkte – eben die ∈ Z – aufweist.

Aus der Verkürzung der Addition vom Typ

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = b$

entsteht die *Multiplikation*

a • n = b (*Faktor* a mal *Faktor* n gleich *Produkt* b).

Will man von b wieder zurückkommen zu a, so muss man b durch n teilen: Die *Division*

b : n = a (*Dividend* b geteilt durch *Divisor* n gleich *Quotient* a)

ist erfunden.

Innerhalb der Menge Z lässt sich die Division nur durchführen, wenn b ein Vielfaches von a ist, d.h. nur wenn b : n = a eine Umkehrung der Multiplikation a • n = b ist. Lässt man bei der Umkehrung für b nicht nur Vielfache von a zu, sondern alle ∈ Z, also b : n = a ohne dass b ein Vielfaches von a wäre, dann entsteht für a abermals eine neue Zahlenart: die (Dezimal-) *Brüche*. Zusammen mit den ganzen Zahlen Z ergeben sie die *Menge der rationalen Zahlen* Q.

Das Zeichen 'Q' erinnert an 'Quotient'. Der Terminus 'rationale Z.' erklärt sich dadurch, dass 'ratio' nicht nur die Bedeutung von 'Vernunft' hat sondern auch die von 'Verhältnis' und das mit gutem Grund: Ist es doch ein zentrales Verfahren beim Anwenden und Entstehen der Vernunft, Dinge und Sachverhalte ins Verhältnis zu setzen. Analog zu oben gilt: (N ⊂ Z ⊂ Q).

Die Vorstellung von der Menge der rationalen Zahlen kann man mit dem Bild eines Zahlenstrahls annähern, der aus einer Kette unendlich dicht aneinander liegender Perlen besteht, zwischen denen gleichwohl ebenso viele Lücken klaffen.

Wir erkennen als *methodisch-erkenntnistheoretisches Prinzip* der bisher beschriebenen Vorgänge: Jede neue Rechenart entsteht zunächst als Verkürzung der vorhergehenden und nimmt diese in sich auf. Ihre Umkehroperation kann sich durch Verallgemeinerung von dieser Herkunft emanzipieren – sozusagen zu sich selbst kommen – und erzeugt dann eine neue Zahlenart.

Entsprechend diesem Prinzip entwickeln wir aus der Verkürzung der Multiplikation vom Typ

$a_1 \bullet a_2 \bullet a_3 \bullet \ldots \bullet a_n = b$ die *Exponentialrechnung*

$a^n = b$ (*Basis* a hoch *Exponent* n gleich *Potenz* b).

Bei der Umkehrung der Exponentialrechnung entstehen nun zwei neue Operationen und eine neue Zahlensorte: Um bei $a^n = b$ von b wieder zurück nach a zu kommen, muss man die *n-te Wurzel aus b* ziehen.

$a = \sqrt[n]{b}$

Hierbei ist n ∈ N der *Wurzel-Exponent*, b der *Radikand* und a die *Wurzel*. (Beispiel: 'zwei hoch drei gleich acht' wird umgekehrt zu 'dritte Wurzel aus acht gleich zwei'). Lässt man nun bei 'n-te Wurzel aus b gleich a' für b nicht nur Zahlen zu, die aus Multiplikationen gleicher Faktoren hervorgegangen sind (z.B. Quadratzahlen) sondern z.B alle $\in$ N, so ergibt sich für a abermals eine neue Sorte Zahlen: die *irrationalen* Zahlen.

Zu ihnen gehören u.a. alle Wurzeln, die keine ganzen Zahlen sind (die nicht 'aufgehen'), z.B. Wurzel aus zwei, drei, fünf usw. Die irrationalen Zahlen lassen sich durch *unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche* beschreiben, wenn auch nicht vor- oder darstellen. Man schreibt: $\sqrt{2} \approx 1{,}414\ldots$ (die drei Punkte sind Ausdruck der unendlichen, nicht-periodischen Folge von Ziffern).

Die zweite Umkehrung der Exponentialrechnung ist das *Logarithmieren*. Dabei will man nicht von b auf a zurückgreifen, sondern auf den Exponenten n: Wenn $a^n = b$ ist, dann ist die Antwort auf die Frage: 'a hoch was ist gleich b?' der Logarithmus von b zur Basis a. (Beispiel: 'Zwei hoch drei gleich acht' wird umgekehrt zu 'Drei gleich Logarithmus von acht zur Basis zwei') Auch alle Logartihmen sind irrationale Zahlen, wenn sie keine natürlichen sind, d.h. wenn b nicht das Produkt aus n gleichen Faktoren a ist.

Weitere irrationale Zahlen ergeben sich aus unendlichen Reihen von Operationen, wie z.B. bei der berühmtesten irrationalen Zahl:

$\pi = 4 \bullet (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 \pm \ldots \pm 1/2n\text{-}1)$

oder der Eulerschen Zahl e [= lim für n –> ∞ $(1 + 1/n)^n$], den Werten der Winkelfunktionen usw. Zusammen mit den rationalen Zahlen Q ergeben die irrationalen Zahlen die *Menge* R *der reellen Zahlen*[3]. Damit erhalten wir folgende Teilmengenverhältnisse:

$N \subset Z \subset Q \subset R$.

Mit der Menge der reellen Zahlen schließen sich die Lücken des Zahlenstrahls zu einer durchgehenden Linie.

Trotz des scheinbar eingängigen Bildes sprengt insbesondere der Begriff der irrationalen Zahl unser Vorstellungsvermögen: Denken Sie nach über die Konsequenzen der Antworten auf folgende Fragen: Wieviele rationale Zahlen passen zwischen zwei andere? Wieviele irrationale Zahlen passen zwischen zwei beliebig dicht aneinander liegende rationale? Sind die alfabetisch geordneten Daten der Geburtstage der Hamburger Bevölkerung Bestandteil der Ziffernfolge von π?

[Durch abermalige Ausweitung des Zahlenbereichs in Gestalt der Zulassung von negativen Zahlen beim Wurzelziehen entstehen die *imaginären Zahlen* mit $i \bullet i = i^2 = -1$, die, vereinigt mit den reellen, die *Menge der komplexen Zahlen* K, ergeben, mit der in unserem Zusammenhang aber nicht gerechnet werden muss.]

© v. Kügelgen 131201

[3] Mit der Bezeichnung 'reell' wird auf die Tatsache pointiert, dass diesen Zahlen, obwohl sie mit Ziffernfolgen nur angenähert werden können und sich unserem Verständnis weitgehend entziehen, der gleiche Wirklichkeitsgrad zukommt, wie etwa der Menge 'drei'.